組織の動学分析

星 野 靖 雄

東洋大経営研究所研究報告 1976. No. 2 抜刷

組織の動学分析

星 野 靖 雄

はじめに

組織行動の解明は現代社会において，極めて重要な意味をもっている。

我々の生活する社会そのものの運営は，なんらかの意味で組織との関連を持たなければ，存在し得ないのである。

この組織が時間的に変化していく状態，すなわち，動態的変化を，我々は明確な，操作可能な型に定式化して，その特性を調べてみたいのである。組織の動態的変化の定式化を，我々は組織の動学分析と名付ける。

自然科学，社会科学を問わず，人的又は自然現象の因果関係を，操作可能な型で表現する方法はいくつかある。その中で，我々は基本的には一連の微分方程式により現象を表現し，これを操作して現象の特性を研究するのである。

本稿は，組織の動学分析，要約して，組織動学の建設のための序章である。そのために，まず従来からある研究のサーベイを行なう。

そこで，第1節に，戦略研究の一つとしてのランチェスターの法則をとりあげ，最も基本的な社会科学における微分方程式系による現象の表現について説明した。

第2節に，国家間の抗争，協調のモデルとしてのリチャードソン・モデルを概説した。

第3節には，比較的新しいデータを駆使してモデルの適合性を考察したボェボドスキーのモデルを取り上げた。

第4節に，二つの組織の一般型の競争モデルを，リチャードソン・モデルの延長として設定し解析をした。

第5節には，三つの組織の競争型一般モデルを考え，これを解いた。

第6節は，一般的に n 個の組織の場合の連立微分方程式を示し分析した。

1 ランチェスターの法則

F・W・ランチェスターは，第1次大戦での航空機，航空力学の発展を詳説し，戦争におけるその役割，重要性を強調している。Lanchester〔11〕

更に，戦闘のモデルを提唱し，解析的な方法を示している。

戦闘の仕方には，古代と現代では質的に違う面があるとしており，前者は，本質的には刀と盾で表現されをように1対1の闘争であり，兵器の使用，攻撃，防禦が直接的であるのに対し，後者は，戦闘は本質的に集団的なものであり，兵器も大砲や機関銃等のように直接に個人対個人ではなく，集団対集団の間接的な闘争を主とするとしている。

1対1ではなく集団対集団が闘争の主体となってくると，戦闘には兵力の集中の効果が現われてくると考えられる。

二つの戦闘している組織 A，B があり，各々のメンバーの個人の戦闘力は同値であるとする。A，B の各々の兵力を x，y と表現すると，x，y が戦闘によって減少していく状態は次のような微分方程式で表現できると考えられる。

$$\frac{dx}{dt}=-C_1y \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt}=-C_2x \qquad C_1, C_2 \text{ は定数} \tag{2}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \text{より} \quad \frac{dx}{dy}=\frac{C_1y}{C_2x}$$

$$C_2xdx=C_1ydy$$

$$\frac{C_2}{2}x^2=\frac{C_1}{2}y^2+C \qquad (C：積分定数) \tag{3}$$

この法則は，(3)のように各々の兵力 x，y の2乗が戦闘力の大きさを表現していると考えられるため，これをランチェスターの2乗法則又は，2次法則という。

もし，A，B の各々のメンバーが，相手がどこにいるのか知らないような場合を考えると，一方の側の損失率は，他方の側のメンバー数だけでなく，当方のメンバー数の大きさにも影響を受けるわけであり，以下のように定式可能であるとしている。

$$\frac{dx}{dt}=-C_1yx \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dt}=-C_2xy \tag{5}$$

これを解くと，

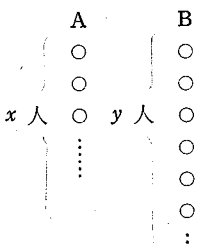
$$\frac{dx}{dy}=\frac{C_1}{C_2}$$

$$x=\frac{C_1}{C_2}y+C \tag{6}$$

これを，ランチェスターの線型法則又は1次法則という。[1)]

ランチェスターの2次法則と1次法則について別の説明を以下にする。

図1



左図のように，A軍とB軍が対面して攻撃すると仮定する。仮定により，A，B両軍の兵器が敵軍の人間を殺傷する確率を p とし，これは両軍に共通であるとする。単位時間内に兵器を使用できる回数を両軍とも N として，各々の軍の生存率を計算する。

A軍は $(1-p)^{\frac{yN}{x}}$，B軍は $(1-p)^{\frac{xN}{y}}$ である。ここで，A，B両軍の生存率の比 K を求めると，

$$K=(1-p)^{\frac{yN}{x}}/(1-p)^{\frac{xN}{y}}$$
$$=(1-p)^{y^2}/(1-p)^{x^2}$$

すなわち，生存率は，敵軍の兵員の2乗に比例して，急激に低下することがわかる。

このことは，ランチェスターの2次法則と同じことを意味していると考えられる。

ここで，もし，ランチェスターの1次法則と同じ仮定で，敵軍の全体の陣地はわかっているが，個々の兵員の場所がわからない場合，A，B両軍の生存率は，$(1-p)^{yN}$，$(1-p)^{xN}$ となり，生存率の比 K は

$$K=(1-p)^{yN}/(1-p)^{xN}=(1-p)^{y}/(1-p)^{x}$$

となる。

すなわち，敵軍の兵員に比例して生存率の低下することがわかる。このことは，ランチェスターの1次法則と同じ内容である。

2　リチャードソン・モデル

リチャードソン・モデルは，F. W. リチャードソンが提案した，いくつかの国家間，特に2カ国間における軍備競争を記述する動学モデルである。Richardson〔12〕

2カ国，A，B の軍備レベルを x，y とすると，2カ国間の軍備レベルは次のような微分方程式で表現できる。

$$\frac{dy}{dt}=a_1x-b_1y+c_1 \tag{7}$$

$$\frac{dx}{dt}=a_2y-b_2x+c_2 \tag{8}$$

ここで，パラメーター a_1，a_2 は防禦係数 (defence coefficients) と呼ばれ，b_1，b_2 は負荷係数 (fatigue coefficients)，c_1，c_2 は敵対係数 (grievance coefficients) と呼ばれている。

防禦係数の項は，相手国の兵力の大きさにつれて，自国の軍備も拡大せざるをえないという意味で，正の値をとると仮定している。

第2項は，自国の軍備水準に対応して経済的負荷がかかり，これに比例して軍備の増加率は減少するとしている。

第3の項は，他国に対しての憎悪，悪感情，敵愾心といった心理的な影響で，軍備水準の増加率に対して正の値を持つと考えている。

リチャードソン・モデルの特徴は，これらの軍備競争の原因が互いに独立であり，軍備の拡大，縮小に線型の関数で表現される影響があるということ

である。

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dx}{dt}=0$ のとき，(7)，(8)の微分方程式系が均衡値を持つ。

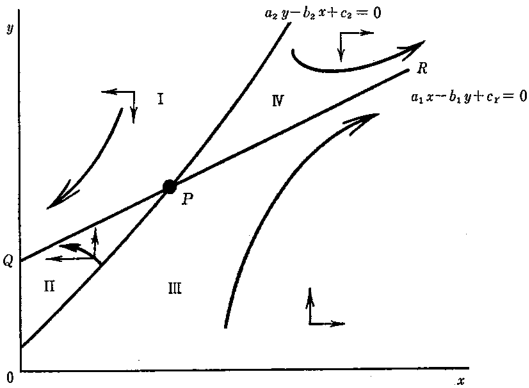
$$a_1x-b_1y+c_1=0$$
$$a_2y-b_2x+c_2=0$$

クラーメル（Cramer）の公式より

$$x=\begin{vmatrix}-c_1 & -b_1\\ -c_2 & a_2\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}a_1 & -b_1\\ -b_2 & a_2\end{vmatrix}$$
$$=\frac{-a_2c_1-b_1c_2}{a_1a_2-b_1b_2}$$
$$y=\frac{-a_1c_2-b_2c_1}{a_1a_2-b_1b_2}\qquad(a_1a_2\fallingdotseq b_1b_2)$$

これを図示すると図2のようになる。両直線の交点 P が均衡点であり，この座標は

図　2



$$P=\left(\frac{-a_2c_1-b_1c_2}{a_1a_2-b_1b_2},\ \frac{-a_1c_2-b_2c_1}{a_1a_2-b_1b_2}\right)\qquad(a_1a_2\fallingdotseq b_1b_2)$$

である。

初期値が，2つの直線 $a_1x-b_1y+c_1=0$ と $a_2y-b_2x+c_2=0$ とで区切られた4つの領域のどこにあるかによってベクトル線の方向は異なる。図のように4つの領域をⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳと表現する。初期値が領域Ⅰ，Ⅱにある場合には，ベクトル線は Q の方向へ向かって移動し，Ⅲ，Ⅳにある場合には，

R の方向へ向かう。このように，初期値のとり方により，方向が変化する系は不安定であるといえる。c_1, $c_2>0$ である限り以上のような性質を満たすため，もし初期値がⅢ，Ⅳにあれば，両国は無限の軍備拡大競争をし続けることになる。

3　ボェボドスキーのモデル

J．ボェボドスキー (Voevodsky)〔15〕は，サイバネティックスの分析方法により現代の兵器戦争を戦力 (battle strength)，戦災 (battle causalities)，戦死 (battle deaths) の3つのカテゴリーに分類して定量的に解析している。

(1)　戦死と戦災

戦死と戦災という2要因の関係を以下のように定式化する。任意の時点における戦死数を D とし，同時刻の戦災数を C とすると，

$$D=\gamma C^{\delta}$$

という関係がある。ここで γ, δ は敵味方の両軍の兵器の効率によって決定される定数である。又，兵器の効率は D と C の関係によって決まると考えられる。

(2)　戦力と戦災

(1)と同様に任意時点 t における戦力を S とし，戦死 C との関係も次式のように表現する。

$$S=\alpha C^{\beta}$$

α，β とは，戦場における戦闘の強さによって決まる定数である。

両辺の対数をとると，

$$\log S=\log\alpha+\beta\log C$$

時間 t で微分すると

$$\frac{1}{S}\frac{dS}{dt}=\beta\frac{1}{C}\frac{dS}{dt}$$

となる。

ボェボドスキーは，このモデルを実際のデータに当てはめ，米国側として，β の値を第2次大戦で0.38，朝鮮戦争で0.57，ベトナム戦争で0.36であるとしている。β を取替係数 (replacement coefficient) という。$\beta=0$ のときは戦闘は一定状態となり，α は最初の戦力に等しくなる。

(3)　両軍の戦力，戦災，戦死の関係

友軍の戦力を X_1，敵軍のを Y_1 とし，同様に戦災数を X_2，Y_2，戦死数を X_3，Y_3 とする。A_i，k_i を定数とすれば，

$$Y_i = A_i X_i^{k_i} \quad (i=1\sim3)$$

いくつかのケース・スタディによると，k_i はほとんど1に等しいことが発見されている。[2)]

もし $k_i=1$ であると，

$$dY_i = A_i dX_i$$

となる。

このことは，一方の軍が戦力を増加すると，他方の側も同様なことをすることを意味しており，一方の側の戦災や戦死も，他方の戦災や戦死をもたらすことである。ランチェスターはこのことを交換比（exchange ratio）と呼んでいる。

(4)　戦力の動学

戦争状態にある国家間の行動の特性は，2階の線型微分方程式系で表現されることから，一般解は $S=A+Be^{\lambda_1 t}+Ce^{\lambda_2 t}$ の型をとるとしている。ここで A，B，C，λ_1，λ_2 は定数である。

この定式化は，N. ウィーナー（Wiener），ランチェスター，リチャードソン等によって開発されたものであるが，これを更に次のように発展させている。

戦力の上限を S_∞ として，時間 t と S の間の関係を調べると，t と $\log(S_\infty - S)$ とは線型の関係があることが知られている。（図3）

この直線の勾配を $-\frac{1}{\tau}$ とし，S，t の初期値を S_0，t_0 とすれば次式を得ることができる。

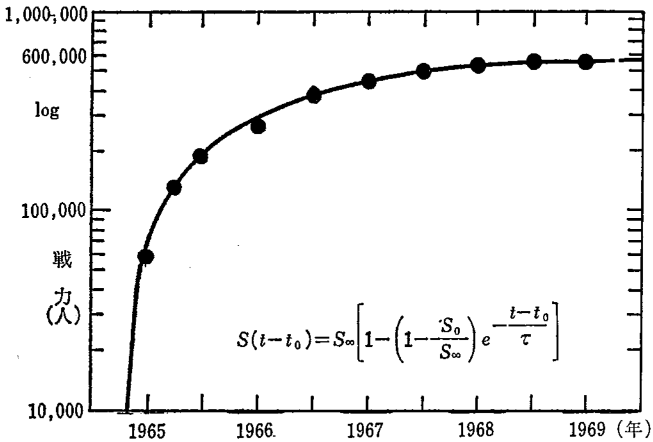
$$\log\left\{\frac{S_\infty - S(t-t_0)}{S_\infty - S_0}\right\} = -\frac{t-t_0}{\tau}$$

すなわち，

$$\frac{S_\infty - S(t-t_0)}{S_\infty - S_0} = \exp\{-(t-t_0)/\tau\}$$

左辺の分母，分子を S_∞ で割って，移項すると，

図3　南ベトナムにおける米軍の戦力



$$\frac{S(t-t_0)}{S_\infty}=1-\left(1-\frac{S_0}{S_\infty}\right)\exp\{-(t-t_0)/\tau\}$$

$$\therefore\quad S(t-t_0)=S_\infty[1-\exp\{-(t-t_0)/\tau\}]$$

$$\left(\because\quad \frac{S_0}{S_\infty}\fallingdotseq 0\right)$$

米国の第1次大戦での $S_\infty=3,670,000$人，第2次大戦では $S_\infty=16,000,000$人，ベトナム戦争では $S_\infty=600,000$ 人であるとして，これらから上述のモデルを使い戦争の継続期間を推定している。

4　一般型の競争モデル

第1節でランチェスターの法則，第2節でリチャードソン・モデル，第3節でボェボドスキーのモデルの概略を述べたのであるが，この節では，全体を統一して一般化するモデルを考えてみる。

2カ国を A，B と表現し，各々の兵力を x，y とする。一般型は次のようになる。

$$\frac{dx}{dt}=a_1x+b_1y+c_1 \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dt}=a_2x+b_2y+c_2 \tag{10}$$

ランチェスターの2次法則は，上式において $a_1=0$, $c_1=0$, $b_2=0$, $c_2=0$ の特別な場合である。

更に，ランチェスターの1次法則をも取り入れた一般型は次のようになる。

$$\frac{dx}{dt}=a_1xy+b_1x+c_1y+d_1 \tag{11}$$

$$\frac{dy}{dt}=a_2xy+b_2x+c_2y+d_2 \tag{12}$$

ランチェスターの1次法則は，ここで $b_1=c_1=d_1=b_2=c_2=d_2=0$ の場合である。

まず前者の微分方程式系を解くことにする。

$$\frac{(9)}{(10)}\text{は，}\quad \frac{dx}{dy}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2} \tag{13}$$

この微分方程式は，形が $y'=f(y/x)$ で与えられるため同次微分方程式である。

2直線，$a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ が交点をもつ場合，その交点を $(x_0,\ y_0)$ とする。ただし，$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\fallingdotseq 0$

すると，$x=X+x_0$, $y=Y+y_0$ とおける。

(13)式は

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy}&=\frac{a_1(X+x_0)+b_1(Y+y_0)+c_1}{a_2(X+x_0)+b_2(Y+y_0)+c_2}\\&=\frac{a_1X+b_1Y+a_1x_0+b_1y_0+c_1}{a_2X+b_2Y+a_2x_0+b_2y_0+c_2}\\&=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\end{aligned} \tag{14}$$

ここで $X=uY$ とおく。

$$\frac{dX}{dY}=\frac{du}{dY}Y+u$$

である。

(14)式は，

$$\frac{du}{dY}Y+u=\frac{a_1u+b_1}{a_2u+b_2}$$

$$\frac{1}{Y}dY=1\Big/\left(\frac{a_1u+b_1}{a_2u+b_2}-u\right)du$$

両辺を積分すると，

$$\int\frac{1}{Y}dY=\int\frac{a_2u+b_2}{-a_2u^2+(a_1-b_2)u+b_1}du \tag{15}$$

ここで，右辺の被積分関数の分母を0とおくと

$$-a_2u^2+(a_1-b_2)u+b_1=0$$

この方程式の根 $\dfrac{-(a_1-b_2)\pm\sqrt{(a_1-b_2)^2+4a_2b_1}}{-2a_2}$ を α，β とおくと，(15)式は

$$\int\frac{1}{Y}dY=\int\frac{a_2u+b_2}{-a_2(u-\alpha)(u-\beta)}du$$

ここで，$t+w=a_2$，$-t\beta-w\alpha=b_2$ となる定数 t と w を導入すると，

$$\int\frac{1}{Y}dY=-\frac{1}{a_2}\int\left(\frac{t}{u-\alpha}+\frac{w}{u-\beta}\right)du$$

$$\log Y^{a_2}+\log(u-\alpha)^t+\log(u-\beta)^w=C$$

$$Y^{a_2}(u-\alpha)^t(u-\beta)^w=C' \qquad (C'=e^C)$$

$$Y^{a_2}(X/Y-\alpha)^t(X/Y-\beta)^w=C'$$

よって，

$$(y-y_0)^{a_2}\{(x-x_0)/(y-y_0)-\alpha\}^t\{(x-x_0)/(y-y_0)-\beta\}^w=C'$$

となる。

5　3人の競争型一般モデル

前節は，A，B，2軍の一般型のモデルであった。これに，第3番目の国家又は組織，一般には，システム C が参加して，3者，A，B，C の一般型競争モデルを考える。

(9)，(10)にもう一つ微分方程式が加わった場合と同じになるので，A，B，C のメンバー数を x，y，z とすると，

$$\frac{dx}{dt}=a_1x+b_1y+c_1z \tag{16}$$

$$\frac{dy}{dt}=a_2x+b_2y+c_2z \tag{17}$$

$$\frac{dz}{dt}=a_3x+b_3y+c_3z \tag{18}$$

この連立線型微分方程式を解くにあたり，$a_i=b_i=c_i=0(i=1\sim3)$ 以外の解を持つためには，λ を固有値として，固有方程式を求める。

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2-\lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

すると，

$$(a_1-\lambda)(b_2-\lambda)(c_3-\lambda)+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3$$
$$-c_1(b_2-\lambda)a_3-(a_1-\lambda)c_2b_3-(c_3-\lambda)a_2b_1=0$$

これを整理すると，

$$\lambda^3-(a_1+b_2+c_2)\lambda^2+(a_1c_3+a_1b_2+b_2c_3-a_2b_1-a_3c_1-c_2b_3)\lambda$$
$$+a_1c_2b_3+a_2b_1c_3+a_3b_1c_1-a_1b_2c_3-a_2b_3c_1-a_3b_1c_2=0$$

ここで計算の都合上，λ^2 の係数を a，λ の係数を b，定数を c とおくと，

$$\lambda^3-a\lambda^2+b\lambda+c=0$$

カルダノ（Cardano）の解法により $\lambda=\mu+\frac{a}{3}$ とおく。

$$\mu^3+\left(b-\frac{1}{3}a^2\right)\mu-\frac{2}{27}a^3+\frac{ab}{3}+c=0$$

更に，$p=\left(b-\frac{1}{3}a^2\right)$，$q=-\frac{2}{27}a^3+\frac{ab}{3}+c$ とおくと，求める解は

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q+\sqrt{\triangle})}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q-\sqrt{\triangle})},$$
$$w\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q+\sqrt{\triangle})}+w^2\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q-\sqrt{\triangle})},$$
$$w^2\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q+\sqrt{\triangle})}+w\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q-\sqrt{\triangle})}$$

但し，$w^3+1=0$，$w\neq1$，$\triangle=q^2+4p^3$ である。

3つの固有根を λ_1，λ_2，λ_3 とする。

又，$\begin{cases} \text{(i)} & \triangle<0 & \text{相異なる3実根} \\ \text{(ii)} & \triangle=0 & \text{等根} \\ \text{(iii)} & \triangle>0 & \text{虚根} \end{cases}$

である。

(i) 相異なる３実根，λ_1，λ_2，λ_3 がある場合，λ_1 は次の方程式を満足する。

$$(a_1-\lambda_1)\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1=0 \tag{19}$$

$$a_2\alpha_1+(b_2-\lambda_1)\beta_1+c_2\gamma_1=0 \tag{20}$$

$$a_3\alpha_1+b_3\beta_1+(c_3-\lambda_1)\gamma_1=0 \tag{21}$$

この連立方程式は，定数項がすべて０であるので，$\alpha_1:\beta_1:\gamma_1$ を求める。

$$\alpha_1:\beta_1=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2-\lambda_1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_1-\lambda_1 & c_1\\ c_2 & c_2\end{vmatrix}$$

$$\beta_1:\gamma_1=\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3-\lambda_1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}b_2-\lambda_1 & a_2\\ b_3 & a_3\end{vmatrix}$$

より

$$\alpha_1:\beta_1:\gamma_1$$

$$=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2-\lambda_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3-\lambda_1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_1-\lambda_1 & c_1\\ c_2 & c_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3-\lambda_1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}b_2-\lambda_1 & a_2\\ b_3 & a_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1-\lambda_1 & c_1\\ c_2 & c_2\end{vmatrix}$$

$\therefore\quad x=\alpha_1 e^{\lambda_1 t}$

$y=\beta_1 e^{\lambda_1 t}$

$z=\gamma_1 e^{\lambda_1 t}$　　（簡略化のため行列式はつけない）

λ_2，λ_3 についても全く同様の計算を行なう。

すると，一般解は，C_i $(i=1,3)$ を積分定数とすると，

$$x=C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t}+C_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t}+C_3\alpha_3 e^{\lambda_3 t}$$

$$y=C_1\beta_1 e^{\lambda_1 t}+C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}+C_3\beta_3 e^{\lambda_3 t}$$

$$z=C_1\gamma_1 e^{\lambda_1 t}+C_2\gamma_2 e^{\lambda_2 t}+C_3\gamma_3 e^{\lambda_3 t}$$

(ii) 重根がある場合

もし，$\lambda_2=\lambda_3$ であるとすると

λ_2 について

$$x=\alpha_2 e^{\lambda_2 t},\quad y=\beta_2 e^{\lambda_2 t},\quad z=\gamma_2 e^{\lambda_3 t}$$

λ_3 について

$$x=\alpha_3 t e^{\lambda_3 t},\quad y=\beta_3 t e^{\lambda_3 t},\quad z=\gamma_3 t e^{\lambda_3 t}$$

となり，一般解は

$$x=C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t}+C_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t}+C_3\alpha_3 t e^{\lambda_3 t}$$

$$y=C_1\beta_1 e^{\lambda_1 t}+C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}+C_3\beta_3 t e^{\lambda_3 t}$$

$$z=C_1\gamma_1 e^{\lambda_1 t}+C_2\gamma_2 e^{\lambda_2 t}+C_3\gamma_3 t e^{\lambda_3 t}$$

(iii) 虚根の場合

2つの共役虚根を $\lambda_2=\mu+i\nu$, $\lambda_3=\mu-i\nu$ （μ, ν は実数） とし，他は(i)と同様に求める。一般解は，

$$x=C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t}+C_2(\mu_1+\nu_1 i)e^{it}+C_3(\mu_1-\nu_1 i)e^{it}$$
$$y=C_1\beta_1 e^{\lambda_1 t}+C_2(\mu_2+\nu_2 i)e^{it}+C_3(\mu_2-\nu_2 i)e^{it}$$
$$z=C_1\gamma_1 e^{\lambda_1 t}+C_2(\mu_3+\nu_3 i)e^{it}+C_3(\mu_3-\nu_3 i)e^{it}$$

となる。

6　n 人の競争型一般モデル

第4節の3人の競争型モデルを，より一般化して，n 人の競争型モデルを次に考察する。

n 人の場合は次のように表現できる。

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j+\beta_i \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

ここで α_{ij} は定数，β_i は前述の敵対係数である。

β_i の項を，座標軸を変換することにより消去する。そのために次式の解を求める。

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j=-\beta_i \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

クラーメルの公式より，$|\alpha_{ij}|\neq 0$ のとき

$$x_i{}^*=\frac{D_i}{|\alpha_{ij}|} \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

ここで D_i は $|\alpha_{ij}|$ の第 j 列を $-\beta_i$ でおきかえたものである。

ここで，$X_i=x_i-x_i{}^*$ として座標軸を変換する。

$$\frac{dX_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}X_j \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

この連立線型微分方程式が解を持つためには，固有方程式が下の条件を満足させなければならない。

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}\alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \cdots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

この方程式の根，固有根は前節の分類と同じようになり，これを λ_j ($=j$ 1, 2, …n) とおくと，一般解は次のようである。但し a_{ij} は前節の $\alpha_1:\beta_1:\gamma_1$ の比の係数を一般化した，λ_i の i に対応する係数である。

i) 固有根が全部異なる場合

$$x_i(t)=\sum_{j=1}^{n}C_j a_{ij} e^{\lambda_j t} \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

ii) 固有方程式が等根を持つ場合

λ_1 が固有方程式 $D(\lambda)=0$ の P 重根であるとし，定数を C_j, C'_j とすると，

$$\sum_{j=1}^{P}\left(C_j+C'_j e^{\lambda_1 t}\right)$$

が解である。

iii) 固有方程式が虚根を持つ場合

虚根が $\lambda_1=a+bi$, $\lambda_2=a-bi$ (a, b は実数) とすれば，μ_j, ν_j ($j=1$, 2, …, n) を定数とすると，λ_1, λ_2 に対して

$$\sum_{j=1}^{n}e^{at}(\mu_j\cos bt-\nu_j\sin bt),\ \sum_{j=1}^{n}e^{at}(\mu_j\sin bt-\nu_j\cos bt)$$

が解である。

固有方程式が安定であるか否かという判定は，ラウス・ハーヴィッツ (Routh・Hurwitz) の安定判別の条件[3]による。星野〔4〕〔6〕

おわりに

本稿では，線型微分方程式系で表現される組織間の抗争や協調のモデルを3つ取り上げ，それらの基本型を一般的な型に拡張したモデルを定式化した。

モデルを採用する際には，具体的なデータとの突き合わせが必要になってくると考えられるが，本稿ではその点には触れていない。

非線型な定式化をしたモデルについては，星野〔4〕〔5〕〔6〕を参照されたい。

注

1) H. K. Weiss〔16〕は，ランチェスターの2次，1次法則の仮定を以下のように表現している。

2次法則

仮定1　二つの戦力が互いに攻撃している。

各々の側の単位（個人）は，他方の側のすべての単位の兵器の射程内にある。

仮定2　一方の側内の単位は同一であるが，両陣営は互いに異なった殺傷率を保持している。

仮定3　各攻撃単位は，敵のすべての単位の位置と条件を知っており，目標が滅ぼされれば，攻撃は直ちに別の目標に移動する。

仮定4　攻撃は生存している単位に均等に分布している。

1次法則

仮定1，2は同じ。

仮定3　各攻撃単位は，敵軍の場所を全体として知っているだけで，この攻撃の結果を一々知っているのではなく，場所全体をただ攻撃する。

仮定4　生存している単位からの攻撃は，敵軍の所在地に均等に分布している。

すなわち，1次と2次法則の根本的な相違は，敵軍全体だけを攻撃しているか，あるいは敵軍の構成単位を個別に攻撃しているかの識別に依存することになる。

2)　$0.95 \leqq k_i \leqq 1.04$ であることが知られている。Voevodsky〔15〕

3)　ラウス・ハーヴィッツの安定判別法は，特性方程式 $F(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}s+a_n=0$ の根の実数部がすべて負にならなければならないことを意味しており，必条十分条件は次の2つである。

(i)　すべての係数は正であること。

(ii)　ハーヴィッツの行列式がすべて正であること。

$$
\begin{cases}
a_0>0 \\
D_1=a_1>0 \\
D_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}>0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2n-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & a_{2n-4} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_{2n-5} \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}>0
\end{cases}
$$

参考文献

〔1〕 Chase, P. E., Feedback Control Theory and Arms Races, *General Systems*, Vol. XIV, 1969.

〔2〕 Deitchman, S. J., A Lanchester Model of Guerrilla Warfare, *Operations*

Research, Vol. 10, 1957.

〔3〕 Engel, J. H., A Verification of Lanchester's Law, *Operations Research*, Vol. 2, 1954.

〔4〕 星野靖雄, 組織の生態学的モデルについて——非線型動学モデルの諸類型と安定性——, 組織科学, Vol. 8, No. 4, 昭和49年.

〔5〕 星野靖雄, 組織行動の最適制御, 経営研究所研究報告, No. 1, 1976.

〔6〕 星野靖雄, 企業行動と組織動学, 白桃書房, 1977年6月発刊予定。

〔7〕 Intriligator, M. D., Some Simple Models of Arms Races, *General Systems*, Vol. IX, 1964.

〔8〕 Intriligator, M. D., Strategic Considerations in the Richardson Model of Arms Races, *Journal of Political Economy*, Vol. 83, No. 2, Apr., 1975.

〔9〕 Klir, G. J., *Trends in General Systems Theory*, John Wiley & Sons, 1972.

〔10〕 Lancaster, K., The Dynamic Inefficiency of Capitalism, *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 5, Sep. / Opt., 1973.

〔11〕 Lanchester, F. W., *Aircraft in Warfare*, Constable, 1916.

〔12〕 Richardson, F. W., *Arms and Insecurity*, Boxwood, 1960.

〔13〕 Morse, P. M., G. E. Kimball, *Methods of Operations Research*, John Wiley & Sons, 1957.

日本科学技術連盟訳, オペレーションズ・リサーチの方法, JUSE, 1955.

〔14〕 Simann, M., J. B. Cruz Jr., Formulation of Richardson's Model of Arms Race from a Differential Game Viewpoint, *The Review of Economic Studies*, Jan., 1975.

〔15〕 Voevodsky, J., Modelling the Dynamics of Warfare, D. K. Knight, H. W. Curtis and L. J. Fogel, *Cybernetics, Simulation, and Conflict Resolution*, Spartan, 1971 所収。

〔16〕 Weiss, H. K., *Lanchester-Type Model of Warfare, Proceedings of the First International Conference on Operations Research*, Oxford Univ. Press, 1957.